

Insegnamento	Complementi di geometria
Livello e corso di studio	Lauree Triennali in Ingegneria Civile, in Ingegneria Elettronica e Informatica, in Ingegneria Industriale; Lauree Magistrali in Ingegneria Civile, in Ingegneria Elettronica, in Ingegneria Gestionale, in Ingegneria Informatica, in Ingegneria Meccanica
Settore Scientifico Disciplinare (SSD)	MATH-02/B Geometria (ex MAT/03)
Anno di corso	Materia a scelta
Anno Accademico	2025-26
Numero totale di crediti	6
Propedeuticità	Geometria, Analisi 1, Analisi 2
Docente	Alfredo Donno https://ricerca.unicusano.it/author/alfredo-donno/ Email: alfredo.donno@unicusano.it Orario di ricevimento: Consultare il calendario alla pagina seguente del nostro sito verificando gli orari di Videoconferenza http://www.unicusano.it/calendario-lezioni-in-presenza/calendario-area-ingegneristica
Presentazione	L'insegnamento di Complementi di geometria è uno degli insegnamenti a scelta proposti per i Corsi di Studio triennali in Ingegneria Civile, in Ingegneria Elettronica e Informatica, in Ingegneria Industriale, nonché per i Corsi di Studio Magistrali in Ingegneria Civile, in Ingegneria Elettronica, in Ingegneria Gestionale, in Ingegneria Informatica, in Ingegneria Meccanica. Il programma può essere suddiviso in tre parti principali. Dapprima viene studiata la teoria generale degli spazi vettoriali sopra il campo reale, che generalizza molte delle nozioni studiate durante il corso di Geometria per lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^n$. Una particolare attenzione viene rivolta allo spazio vettoriale euclideo dei tensori, definiti a loro volta sullo spazio vettoriale euclideo dei vettori geometrici. Fondamentali risultano le conoscenze e le tecniche di Algebra lineare acquisite durante il corso di Geometria. Questa parte si chiude con lo studio delle forme quadratiche su $\mathbf{R}^n$ e la loro riduzione a forma canonica, strettamente legata alla teoria degli operatori lineari simmetrici. La seconda parte del programma prevede lo studio della rappresentazione cartesiana di curve e superfici dello spazio - circonferenza, sfera, coni, cilindri e superfici di rotazione – e utilizza largamente le tecniche della Geometria analitica dello spazio acquisite nel corso di Geometria. La terza e ultima parte del programma concerne la Geometria differenziale delle curve e delle superfici nello spazio, ovvero lo studio di proprietà locali di curve parametrizzate (curvatura, torsione) e di superfici parametrizzate (curvatura gaussiana e curvatura media) per mezzo degli strumenti del calcolo differenziale, rispettivamente in una e due variabili. Questa parte del programma richiede quindi da un lato una buona padronanza del calcolo vettoriale e matriciale, dall'altro la conoscenza dei metodi del calcolo differenziale per funzioni di una e di due variabili, acquisita durante i due corsi propedeutici di Analisi 1 e Analisi 2.
Obiettivi formativi	L'insegnamento di Complementi di geometria ha i seguenti obiettivi formativi: 1. illustrare la teoria di base degli spazi vettoriali reali; 2. illustrare la teoria di base dello spazio vettoriale euclideo dei tensori; 3. illustrare la teoria di base delle forme quadratiche reali su $\mathbf{R}^n$; 4. illustrare la rappresentazione cartesiana di curve e superfici notevoli nello spazio; 5. illustrare le nozioni e le tecniche fondamentali della Geometria differenziale delle curve; 6. illustrare le nozioni e le tecniche fondamentali della Geometria differenziale delle superfici.
Prerequisiti	E' necessario che lo studente che si avvicina allo studio di questo insegnamento abbia una buona padronanza degli strumenti dell'Algebra lineare e dei metodi della Geometria analitica, appresi durante il corso di Geometria. Lo studente deve inoltre conoscere il calcolo differenziale e il calcolo integrale appresi durante i corsi di Analisi 1 e Analisi 2.
Risultati di apprendimento attesi	Conoscenza e capacità di comprensione Lo studente, al superamento del corso, avrà conoscenza della struttura algebrica di spazio vettoriale euclideo, dell'algebra tensoriale, della teoria delle forme quadratiche e della loro riduzione a forma canonica. Lo studente avrà inoltre imparato a determinare l'equazione cartesiana di curve e superfici notevoli dello spazio, quali la

	circonferenza, la sfera, i coni, i cilindri e le superfici di rotazione. Lo studente avrà infine acquisito e compreso le principali nozioni della Geometria differenziale delle curve e delle superfici nello spazio: rappresentazione parametrica, studio della regolarità, proprietà locali di curve quali quelle di curvatura e torsione, classificazione dei punti di una superficie in ellittici, parabolici e iperbolici tramite lo studio della curvatura gaussiana. Applicazione delle conoscenze Lo studente, al superamento del corso, sarà in grado di applicare le nozioni e le tecniche di Algebra lineare acquisite nel corso di Geometria allo studio dell'algebra tensoriale, nonché le nozioni e le tecniche della Geometria analitica alla determinazione di equazioni cartesiane di curve e superfici notevoli dello spazio euclideo, e allo studio delle loro proprietà. Infine, lo studente sarà in grado di applicare gli strumenti del calcolo differenziale in una e più variabili, appresi nei corsi di Analisi 1 e Analisi 2, allo studio delle proprietà locali di curve e superfici dello spazio, facendo uso anche dei metodi del calcolo matriciale e dell'Algebra lineare.
Organizzazione dell'insegnamento	Il corso è sviluppato attraverso le lezioni preregistrate audio-video che compongono, insieme a slide e dispense, i materiali di studio disponibili in piattaforma, e distribuiti in 18 moduli per aree tematiche: - Modulo 1 – Vettori geometrici nello spazio - Modulo 2 – Elementi di analisi vettoriale. Spazi vettoriali reali - Modulo 3 – Sottospazi, generatori, basi. Spazi vettoriali euclidei - Modulo 4 – Tensori: prime definizioni. Prodotti tensoriali - Modulo 5 – Lo spazio vettoriale euclideo dei tensori - Modulo 6 – Teoria spettrale. Teorema di Cayley-Hamilton - Modulo 7 – Forme quadratiche reali - Modulo 8 – Riduzione di una forma quadratica a forma canonica. La sfera - Modulo 9 – La circonferenza nello spazio. Coni - Modulo 10 – Cilindri. Superfici di rotazione - Modulo 11 – Geometria differenziale delle curve: prime definizioni. Il piano osculatore - Modulo 12 – Ascissa curvilinea. Triedro di Frenet - Modulo 13 – Formule di Frenet. Curvatura e torsione. Teorema di rigidità - Modulo 14 – Evolute ed evolventi - Modulo 15 – Geometria differenziale delle superfici: prime definizioni - Modulo 16 – Prima e seconda forma quadratica fondamentale. Teorema di Meusnier. Teorema di Eulero - Modulo 17 – Curvatura media e curvatura gaussiana. Superfici rigate - Modulo 18 – Rigate sviluppabili. Sono poi proposti dei test intermedi di autovalutazione, di tipo asincrono, che corredano le lezioni preregistrate, tramite i quali ogni studente può valutare sia la comprensione, sia il grado di conoscenza acquisita dei vari contenuti e prendere coscienza di quali siano, eventualmente, i suoi punti deboli e le sue lacune sui vari argomenti del programma. La didattica interattiva è svolta nei Forum della “classe virtuale” (Area collaborativa della piattaforma) e comprende 2 E-tivity in cui lo studente applica le conoscenze acquisite nelle lezioni di teoria alla soluzione di problemi ed esercizi: - Forum I: Geometria differenziale delle curve: Studio di un'elica circolare - Forum II: Geometria differenziale delle superfici: Studio di una rigata delle tangenti. All'interno di ogni Forum, viene caricato dal Docente un esercizio che lo studente dovrà svolgere e inviare al Docente tramite messaggio privato in piattaforma (e non sul Forum!!!). All'interno del Forum, lo studente potrà invece rivolgere al Docente o anche ai suoi colleghi di corso delle domande relative agli argomenti poi testati nell'esercizio proposto dal Docente e risultati poco chiari, o proporre egli stesso nuovi esercizi e spunti di riflessione. Sono inoltre presenti tra il materiale in piattaforma anche i testi e le soluzioni dei temi d'esame precedenti. In particolare, il Corso di Complementi di geometria prevede 6 c.f.u. (Crediti Formativi Universitari). Il carico totale di studio per questo insegnamento corrisponde circa a 150 ore così suddivise in: - circa 110 ore per la visualizzazione e lo studio del materiale videoregistrato (17 ore videoregistrate, per circa 2/3 di teoria e per circa 1/3 di esercizi); - circa 14 ore di Didattica Interattiva per le E-tivity; - circa 6 ore di Didattica Interattiva per l'esecuzione dei test di autovalutazione; - circa 20 ore per esercitazioni su temi d'esame passati e altri esercizi caricati in piattaforma. Si consiglia di distribuire lo studio della materia uniformemente in un periodo di 11 settimane circa, dedicando allo studio circa 15 ore a settimana.
Contenuti del corso	Modulo 1 – Vettori geometrici dello spazio (1 lezione di teoria ed esercizi videoregistrate per un impegno di 3 ore circa)

	Modulo 2 – Elementi di analisi vettoriale. Spazi vettoriali reali. (2 lezioni di teoria ed esercizi videoregistrate per un impegno di 6,5 ore circa) Modulo 3 – Sottospazi, generatori, basi. Spazi vettoriali euclidei. (2 lezioni di teoria ed esercizi videoregistrate per un impegno di 6,5 ore circa; 1 test intermedio per un impegno di 1 ora circa) Modulo 4 – Tensori: prime definizioni. Prodotti tensoriali. (2 lezioni di teoria ed esercizi videoregistrate per un impegno di 6,5 ore circa) Modulo 5 – Lo spazio vettoriale euclideo dei tensori. (2 lezioni di teoria ed esercizi videoregistrate per un impegno di 6,5 ore circa) Modulo 6 – Teoria spettrale. Teorema di Cayley-Hamilton. (2 lezioni di teoria ed esercizi videoregistrate per un impegno di 6,5 ore circa; 1 test intermedio per un impegno di 1 ora circa) Modulo 7 – Forme quadratiche reali (2 lezioni di teoria ed esercizi videoregistrate per un impegno di 6,5 ore circa) Modulo 8 – Riduzione di una forma quadratica a forma canonica. La sfera. (2 lezioni di teoria ed esercizi videoregistrate per un impegno di 6,5 ore circa; 1 test intermedio per un impegno di 1 ora circa) Modulo 9 – La circonferenza nello spazio. Coni. (2 lezioni di teoria ed esercizi videoregistrate per un impegno di 6,5 ore circa) Modulo 10 – Cilindri. Superfici di rotazione. (2 lezioni di teoria ed esercizi videoregistrate per un impegno di 6,5 ore circa; 1 test intermedio per un impegno di 1 ora circa) Modulo 11 – Geometria differenziale delle curve: prime definizioni. Il piano osculatore. (2 lezioni di teoria ed esercizi videoregistrate per un impegno di 6,5 ore circa) Modulo 12 – Ascissa curvilinea. Triedro di Frenet. (2 lezioni di teoria ed esercizi videoregistrate per un impegno di 6,5 ore circa) Modulo 13 – Formule di Frenet. Curvatura e torsione. Teorema di rigidità. (2 lezioni di teoria ed esercizi videoregistrate per un impegno di 6,5 ore circa) Modulo 14 – Evolute ed evolventi. (2 lezioni di teoria ed esercizi videoregistrate per un impegno di 6,5 ore circa; 1 test intermedio per un impegno di 1 ora circa) E-tivity 1 – Studio di un’elica circolare per un impegno di circa 7 ore. Modulo 15 – Geometria differenziale delle superfici: prime definizioni. (2 di teoria ed esercizi videoregistrate per un impegno di 6,5 ore circa) Modulo 16 – Prima e seconda forma quadratica fondamentale. Teorema di Meusnier. Teorema di Eulero. (2 lezioni di teoria ed esercizi videoregistrate per un impegno di 6,5 ore circa) Modulo 17 – Curvatura media e curvatura gaussiana. Superfici rigate. (2 lezioni di teoria ed esercizi videoregistrate per un impegno di 6,5 ore circa) Modulo 18 – Rigate sviluppabili. (1 lezione di teoria ed esercizi videoregistrate per un impegno di 3 ore circa; 1 test intermedio per un impegno di 1 ora circa) E-tivity 2 – Studio di una rigata delle tangenti per un impegno di circa 7 ore. Esercitazioni su compiti d’esame ed esercizi caricati in piattaforma (per un impegno di 20 ore circa)
Materiali di studio	I materiali didattici sono a cura del docente. Il materiale didattico presente in piattaforma è suddiviso in 18 moduli. Essi ricoprono interamente il programma e

	ciascuno di essi contiene dispense, slide e videolezioni in cui il docente commenta le slide. Tale materiale contiene tutti gli elementi necessari per affrontare lo studio della materia. <i>Ulteriori testi consigliati:</i> A. Carfagna, L. Piccolella. Complementi ed esercizi di geometria e algebra lineare. Zanichelli. A. Donno. Elementi di Geometria differenziale con esercizi. Esculapio. M. Abate, F. Tovena, Curve e superfici, Springer-Verlag Milan 2006. A.N. Pressley, Elementary differential geometry, Springer Undergraduate Mathematics Series.
Modalità di verifica dell'apprendimento	L'esame, sia quando svolto nella sede di Roma, sia quando svolto fuori sede, consiste nello svolgimento di una prova scritta della durata di 90 minuti, tendente ad accertare le conoscenze acquisite dallo studente, e la sua capacità di applicarle allo svolgimento di problemi ed esercizi. La prova scritta prevede 4 esercizi a risposta aperta ed è valutata al massimo 25 trentesimi. Durante la prova scritta NON è consentito utilizzare dispense, appunti, testi o formulari in formato cartaceo né digitale. L'uso della calcolatrice è consentito solo nel caso di calcolatrici non scientifiche né programmabili. Ai fini della valutazione complessiva dell'esame, fino a 6 trentesimi sono assegnati allo studente in virtù dello svolgimento delle due E-tivity (fino a 3 trentesimi per ogni E-tivity), e i restanti 25 trentesimi sono assegnati allo studente sulla base dell'andamento della prova scritta finale. Un punteggio totale di 31 trentesimi si tradurrà nella votazione finale di 30/30 con Lode.
Criteri per l'assegnazione dell'elaborato finale	L'assegnazione dell'elaborato finale avverrà sulla base di un colloquio con il docente in cui lo studente manifesterà i propri specifici interessi in relazione a qualche argomento che intende approfondire; non esistono preclusioni alla richiesta di assegnazione della tesi e non è prevista una media particolare per poterla richiedere.